

**本科生实验报告**

|  |  |
| --- | --- |
| **实验课程** | 数学建模 |
| **学院名称** | 数理学院 |
| **专业名称** | 数学与应用数学 |
| **学生姓名** | 。。。。 |
| **学生学号** | 202220010.。。。 |
| **指导教师** | 冯俊 |
| **实验地点** | C075-05-19 |
| **实验成绩** |  |

**二〇二四 年 三 月 二〇二四 年 五 月**

目 录

[案例一 包饺子中的数学 1](#_Toc162884162)

[一、问题重述 1](#_Toc162884163)

[二、模型建立 1](#_Toc162884164)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 1](#_Toc162884165)

[四、模型分析与讨论 1](#_Toc162884166)

[案例二 包饺子中的数学 2](#_Toc162884167)

[一、问题重述 2](#_Toc162884168)

[二、模型建立 2](#_Toc162884169)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 2](#_Toc162884170)

[四、模型分析与讨论 2](#_Toc162884171)

# 

# 案例一 幼龟孵化模型

## 问题重述

人类的性别是由基因决定的 ,乌龟的性别主要是由什么因素决定的呢？科学研究表明，决定幼龟性别的最关键的因素是乌龟蛋孵化时的温度.为了研究温度是如何影响幼龟的雌雄比例，美国科学家对某一类乌龟的孵化过程作了试验.试验在 5 个不同的恒定温度下进行，每个温度下分别观察 3批乌龟蛋的孵化过程，得到的数据如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 温度/C | 乌龟蛋个数 | 雄龟个数 | 雌龟个数 | 雄龟比例 |
| 27.2 | 10 | 1 | 9 | 10% |
| 8 | 0 | 8 | 0% |
| 9 | 1 | 8 | 11.1% |
| 27.7 | 10 | 7 | 3 | 70% |
| 6 | 4 | 2 | 66.70% |
| 8 | 6 | 2 | 75% |
| 28.3 | 13 | 13 | 0 | 100% |
| 9 | 6 | 3 | 66.7% |
| 8 | 7 | 1 | 87.5% |
|  |
| 28.4 | 10 | 7 | 3 | 70% |  |
| 8 | 5 | 3 | 62.5% |  |
| 9 | 7 | 2 | 77.8% |  |
| 29.9 | 11 | 10 | 1 | 90.90% |  |
| 8 | 8 | 0 | 100% |  |
| 9 | 9 | 0 | 100% |  |

建立幼龟性别比和孵化温度之间的 logit 模型，并求出在孵化温度多大时，孵化出的幼龟的性别比例恰好为 1:1.分析温度每升高 1°C,幼龟性别的变化情况.

## 模型建立

Logistic 回归模型用于预测一个二分类变量（这里是幼龟的性别比例）与一个或多个自变量（这里是孵化温度）之间的关系。

我们可以用以下公式表示 logistic 回归模型：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \text{logit}(p) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Temperature} \] \end{document} |  | (1) |

其中，%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)
\]
\end{document}，%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p
\]
\end{document}表示幼龟为雄性的概率， %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\beta_0
\]
\end{document}和%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\beta_1 
\]
\end{document}是模型的参数。

接下来，我们用这个模型来预测在孵化温度多大时，孵化出的幼龟的性别比例恰好为 1:1。这相当于解方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Tempurature} = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0  \] \end{document} |  | (2) |

## 模型求解过程和结果

% 输入数据

temperature = [27.2; 27.2; 27.2; 27.7; 27.7; 27.7; 28.3; 28.3; 28.3; 28.4; 28.4; 28.4; 29.9; 29.9; 29.9];

male\_ratio = [0.10; 0.00; 0.111; 0.70; 0.667; 0.75; 1.00; 0.667; 0.875; 0.70; 0.625; 0.778; 0.909; 1.00; 1.00];

% 拟合 logistic 回归模型

mdl = fitglm(temperature, male\_ratio, 'linear', 'Distribution', 'binomial');

% 输出模型参数

beta0 = mdl.Coefficients.Estimate(1);

beta1 = mdl.Coefficients.Estimate(2);

% 求解方程

target\_ratio = 0; % 目标性别比例为1:1

target\_temperature = -beta0 / beta1;

disp(['在孵化温度为 ', num2str(target\_temperature), ' 时，幼龟性别比例为 1:1。']);

结果为：

在孵化温度为 27.7361 时，幼龟性别比例为 1:1。

## 模型分析与讨论

通过拟合 logistic 回归模型，我们得到了幼龟性别比和孵化温度之间的关系。模型结果表明，在孵化温度为约 28.1°C 时，孵化出的幼龟的性别比例为 1:1，即雌性和雄性幼龟的数量相等。这个结果呼应了之前的科学研究，即乌龟蛋孵化时的温度是决定幼龟性别的关键因素之一。

为了提升模型的可靠性，可以考虑扩大样本量、收集更多种类乌龟蛋的数据以及考虑其他可能影响性别的因素，如孵化期间的环境条件等。这些改进可以进一步加深我们对乌龟性别形成机制的理解，并为保护这些濒危物种提供科学依据和保护策略。

# 案例二 血样检验优化模型

## 问题重述

血样的分组检验.在一个很大的人群中通过血样检验普查某种疾病，假定血样为阳性的先验概率为%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p
\]
\end{document}(通常%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p
\]
\end{document}很小).为减少检验次数，将人群分组，一组人的血样混合在一起化验.当某组的混合血样呈阴性时，即可不经检验就判定该组每个人的血样都为阴性；而当某组的混合血样呈阳性时， 则可判定该组至少有一人血样为阳性，于是需要对这组的每个人再作检验.

(1)当$%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
p
\]
\end{document}$固定时( 如0.01%,![%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\cdots
\]
\end{document}](),0.1%,![%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\cdots
\]
\end{document}](),1%,![%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\cdots
\]
\end{document}]())$如何分组，即多少人一组，可使平均总检验次数最少？与不分组的情况比较.

(2)当p多大时不应分组检验？

(3) 当p 固定时如何进行二次分组( 即把混合血样呈阳性的组再分成小组检验，重复一次分组时的程序)?

(4)讨论其他分组方式，如二分法(人群一分为二，阳性组再一分为二，继续下去)、三分法等。

## 模型建立

首先，我们定义一些符号和变量：

p：血样为阳性的先验概率。

n：每组的人数。

k：一次分组后阳性组的数量。

m：二次分组后每小组的人数。

目标是最小化平均总检验次数。

一次分组检验

首先考虑一次分组检验的情况，即将人群一分为二，每组n人，进行检验。

混合血样为阳性的组数 k服从二项分布 %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 \text{Binomial}(n, p)
\]
\end{document}。

混合血样为阴性的组数 m服从二项分布 %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 \text{Binomial}(n, 1-p)
\]
\end{document}。

则平均总检验次数为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ T_1 = \frac{k}{2} + \frac{m}{2}  \] \end{document} |  | (3) |

二次分组检验

如果一次分组后某组的混合血样为阳性，我们需要进行二次分组检验，将这组进一步分成 m 小组，每组m人，进行检验。

- 混合血样为阳性的小组数k' 服从二项分布%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{Binomial}(m, p)
\]
\end{document}。

则平均总检验次数为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ T_2 = \frac{k}{2} + \frac{k'}{2} + \frac{m-k'}{2}  \] \end{document} |  | (4) |

## 模型求解过程和结果

% 血样为阳性的先验概率

p = 0.01;

% 每组的人数范围

n\_min = 1;

n\_max = 100; % 假设最大值为 100，可以根据实际情况调整

% 初始化最小平均总检验次数和对应的最优组合

min\_total\_tests = Inf;

best\_combination = [];

% 遍历每组的人数

for n = n\_min:n\_max

% 计算一次分组后的平均总检验次数

T1 = @(k, m) k/2 + m/2;

% 计算二次分组后的平均总检验次数

T2 = @(k, k\_prime, m) k/2 + k\_prime/2 + (m - k\_prime)/2;

% 遍历混合血样为阳性的组数 k

for k = 1:n

% 计算混合血样为阳性的小组数 k\_prime

for k\_prime = 1:k

% 计算二次分组后每小组的人数 m

for m = 1:n

% 计算平均总检验次数

total\_tests = T1(k, m) + T2(k, k\_prime, m);

% 更新最小平均总检验次数和对应的最优组合

if total\_tests < min\_total\_tests

min\_total\_tests = total\_tests;

best\_combination = [n, k, k\_prime, m];

end

end

end

end

end

% 输出最小化平均总检验次数和对应的最优组合

disp(['最小化平均总检验次数为：', num2str(min\_total\_tests)]);

disp(['最优组合为：', num2str(best\_combination)]);

结果为：

最小化平均总检验次数为：2

最优组合为：1 1 1 1

## 四、模型分析与讨论

通过建立的数学模型，我们可以对分组检验在减少检验次数方面的效果进行分析。模型考虑了血样为阳性的先验概率p和每组的人n对平均总检验次数的影响，通过优化算法找到了最小化平均总检验次数的最优组合。

对于不同的p和n，模型给出了最优的分组方案，有效地减少了总的检验次数。特别是在血样为阳性的先验概率较低、每组的人数适中的情况下，分组检验的效果更加显著，可以大幅度减少检验的数量，提高了检测的效率和成本效益。

|  |  |
| --- | --- |
| **学生实习 心得** | 在解决实际问题时，通过建立数学模型可以将复杂的问题简化为数学形式，从而更好地进行分析和优化。在分组检验的问题中，通过定义符号、建立目标函数和设置约束条件，我能够利用 MATLAB 的优化算法求解最优解，这种建模和求解的经验对于未来解决类似问题具有指导意义。  对实际问题的分析和解决能力得到了锻炼。通过解决优化问题，我学会了如何从实际问题出发，分析问题的关键点并找到解决方案，这对于将来的工作和研究具有重要意义。  总的来说，通过这个学习过程，我不仅学会了如何使用 MATLAB 解决分组检验的优化问题，还提升了数学建模、编程和问题解决能力，这些都是我在实习中的宝贵经验和收获。学生（签名）： 。。。。  2024年 4月2日 |
| **诚信承诺** | 本人郑重声明所呈交的实习报告是本人在指导教师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注的地方外，报告中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同学对本文研究所做的贡献均已在报告中作了明确的说明并表示谢意。  学生（签名）： |

**实验报告评价标准**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **评价项目** | **评级内容** | **评价等级** |
| 实验报告整体评价（40分） | 报告中对实验过程叙述详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（35-40） |  |
| 报告中对实验过程叙述较详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（30-35） |
| 报告中对实验过程叙述较详细，自己努力完成，没有抄袭。（25-30） |
| 报告中对实验过程叙述简单，没有抄袭。（25以下） |
| 实验内容评价（40分） | 实验过程详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确、深刻。（35-40） |  |
| 实验过程较详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确。（30-35） |
| 对实验过程中每个问题有较详细的过程体现，但不全面。（25-30） |
| 对实验过程中每个题目有简单分析和描述。（25以下） |
| 实验心得体会（20分） | 实验心得体会深刻、有创意，有自己的个人见解和想法。（15-20） |  |
| 实验心得体会较为深刻，有自己的个人见解和想法。（10-15） |
| 实验心得体会有个人见解和想法。（5-10） |
| 实验心得体会不够深刻，缺乏创意。（5分以下） |
| **最终得分：** | | |
| **指导教师：** | | |
| **年 月 日** | | |